Il probelma dell'ovetto Kinder

Quanti ovetti mi servono per completare la collezione di Natale?

Andrea Mignone

November 20, 2014

# 1 Il problema

La collezione natalizia che si può trovare negli ovetti Kinder consiste in 7 personaggi distinti. Non tutti gli ovetti contengono uno dei 7 personaggi ma solo 1 ovetto su 3. Possiamo dire che, prendendo un ovetto a caso, abbiamo una $p = 1/3$ di trovare uno dei personaggi, mentre con probabilità $1 - p = 2/3$ troveremo una sorpresa generica che non fa parte della collezione. Dal punto di vista della definizione classica di probabilità, possiamo dire che solo in 7 casi su 21 avremo un successo, mentre nei restanti 14 non saremo (del tutto) soddisfatti. (Attenzione: questo non significa che ci sono solo 14 tipi di sorprese non natalizie)

Stanti queste condizioni, quanti ovetti dovremo mangiare per finire la collezione natalizia?

# 2 Formalizzazione del problema

Indichiamo con:

$$X = T_1 + T_2 + ... + T_n,$$

la v.c. che indica il numero di ovetti Kinder da acquistare per finire la collezione, dove $T_i$ è la generica v.c. che conta numero di ovetti da comprare per incrementare la nostra collezione di un nuovo pezzo diverso dagli $i-1$ che avevamo già. Ogni v.c. $T_i$ segue una distribuzione geometrica, per cui possiamo indicare la probabilità di attendere $k$ ovetti per trovare una delle 7 sorprese, che non avevamo già trovato prima, come:

$$P(T_i = k) = (1 - p_i)^{k-1} p_i.$$

Inoltre, indicando con $n$ il numero di personaggi da collezionare (nel nostro caso abbiamo $n = 7$), sappiamo che:

$$p_i = \frac{1}{3} \frac{n - (i-1)}{n}.$$

# 3 Valore atteso di $X$

Per prima cosa, calcoliamo il valore atteso di $X$, ovvero qual è il valore "medio" di ovetti che dobbiamo comprare per completare la collezione. Ogni $T_i$ segue una distribuzione geometrica, allora sappiamo che:

$$E[T_i] = \frac{1}{p_i} = \frac{3n}{n - (i-1)}.$$

Da cui è possibile ottenere il numero atteso di pacchetti per completare la collezione:

$$E[X] = \sum_{i=1}^{n} E[T_i] = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i} = 3n\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + ... + 1\right).$$

Nel caso degli ovetti Kinder del problema in questione, il valore atteso vale:

$$E[X] = \sum_{i=1}^{7} = 54,45. \tag{1}$$

Ci aspettiamo di dover mangiare 55 ovetti per finire tutta la collezione.

# 4 Distribuzione di probabilità di $X$

Ora vogliamo stimare la distribuzione di probabilità seguita da $X$ per poter calcolare, ad esempio, $Pr(X \leq x)$, ovvero: qual è la probabilità di completare la collezione entro l'$x$-simo pacchetto. Partiamo da un esempio più semplice.

## 4.1 Applicazione ad un problema analogo con un dado

Per iniziare parliamo di un problema analogo a questo ma un po' più semplice: qual è la probabilità di ottenere almeno una volta tutte le $n = 6$ facce di un dado in $x$ lanci? Ricorriamo alla definizione classica di probabilità. Il numero di casi favorevoli, ovvero il numero di tutte le sequenze di $x$ lanci che permettono di ottenere almeno una volta ogni faccia del dado, è pari al numero delle possibili funzioni suriettive tra $A$, l'insieme dei lanci, e $B$, l'insieme di possibili risultati del dado, dove $|A| = x$ e $|B| = n = 6$. Fantastico!!! Questo numero, che chiamiamo $S(x, n)$, è pari a:

$$S(x, n) = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)^x.$$

Il numero di casi possibili, ovvero tutte le sequenze di risultati ottenibili in $x$ lanci) è pari a $6^x$ (che peraltro è il numero delle possibili funzioni da $A$ su $B$).

A questo punto la probabilità di vedere tutte e 6 le facce del dado entro $x$ lanci è:

$$Pr(X \leq x) = F(x) = \frac{\sum_{i=0}^{5} (-1)^i \binom{6}{i} (6-i)^x}{6^x}$$

Il problema dell'ovetto Kinder si basa su un approccio simile, con qualche complicazione in più...

## 4.2 Applicazione all'ovetto Kinder

Proviamo ad applicare lo stesso approccio al nostro problema; le facce dal dado saranno le nostre sorprese, mentre il numero di lanci rappresenterà il numero di ovetti da mangiare. Dovremo anche considerare che in alcuni casi potremmo non trovare nessuna delle 7 sorprese natalizie e che ogni elemento che non appartiene alla collezione natalizia, può essere uno dei 14 casi non-natalizi di cui parlavamo inizialmente. Questa particolarità cambia il modo in cui dobbiamo calcolare il

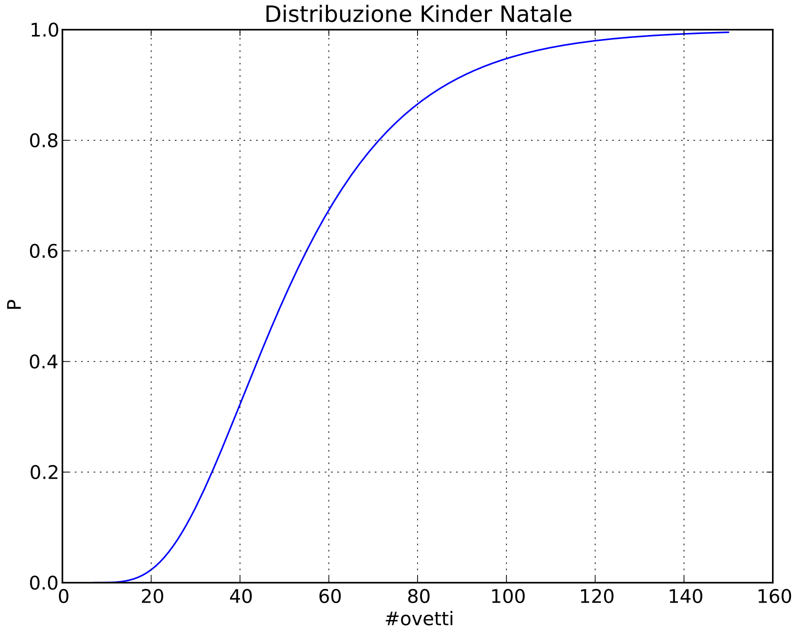


Figure 1: Distribuzione di probabilità (in realtà è discreta).

numero di casi favorevoli che non è più riducibile al numero di funzioni suriettive $S(x, n)$. Difatti nel nostro nuovo insieme $B$ abbiamo sia le 7 sorprese che i 14 casi non-natalizi, ora però non siamo più interessati a coprire tutto $B$, ma stiamo cercando tutti i possibili casi in cui riusciamo ad ottenere almeno una volta ciascuna delle sorprese di Natale. Per questo, i casi favorevoli che ci permettono di completare la collezione entro $x$ ovetti saranno:

$$\sum_{i=n}^{x} S(i,n)\binom{x}{x-i}14^{x-1}.$$

Per capire meglio questa formula, proviamo a svilupparla per calcolare i casi favorevoli che dobbiamo annoverare dovendo mangiare 9 ovetti Kinder, eccola qui:

$$S(7,7)\binom{9}{2}14^2 + S(8,7)\binom{9}{1}14^1 + S(9,7)\binom{9}{0} * 14^0.$$

Il primo termine della somma conta le casistiche in cui completiamo la collezione in 9 ovetti, ma trovando 2 sorprese che non centrano con la collezione natalizia, il secondo termine conta la stessa cosa ma considerando di trovare solo 1 sorpresa non-natalizia, infine il terzo termine abbraccia la casistica in cui troviamo esclusivamente solo sorprese della collezione natalizia. A questo punto possiamo scrivere la funzione di ripartizione di $X$ che stavamo cercando, che assume valori diversi da 0 solo per $x \geq 7$ (figura 1). Eccola qui:

$$Pr(X \leq x) = F(x) = \frac{\sum_{i=7}^{x} S(i,7)\binom{x}{x-i}14^{x-1}}{21^i}. \tag{2}$$

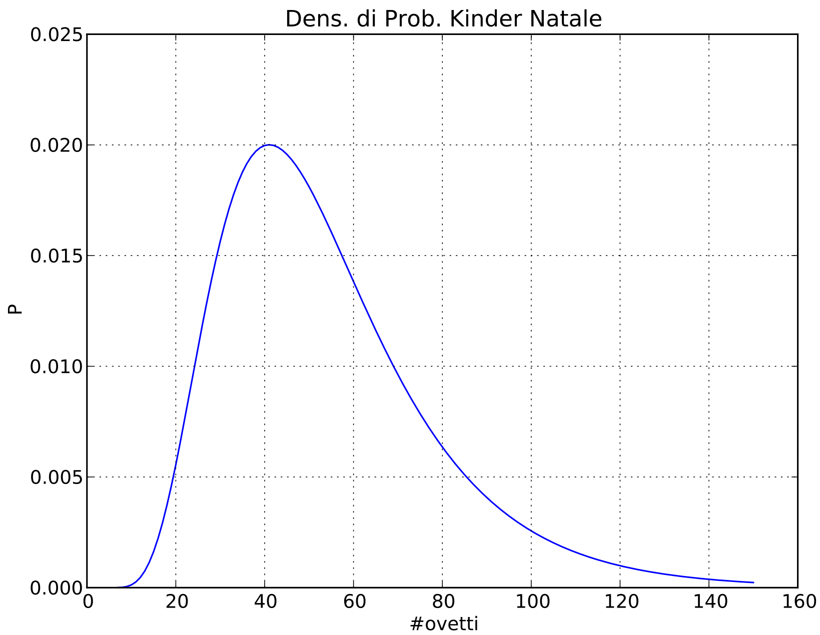


Figure 2: Densità di probabilità (in realtà è discreta).

Partendo da questa, possiamo anche ricavare la funzione di densità di probabilità discreta (figura 2), che in questo caso indica la probabilità di finire la collezione in esattamente $x$ tentativi. Eccola:

$$Pr(X = x) = f(x) = F(x) - F(x-1). \tag{3}$$

## 4.3 Conclusioni

In media, secondo la (1), completeremo la collezione dopo 55 ovetti. Come potevamo immaginare, possiamo ottenere la collezione completa con soli 7 ovetti in tre casi su un milione $2,8 \times 10^{-6}$ (praticamente impossibile). Mangiando 50 ovetti possiamo completare la collezione in un caso su due. Se saliamo a 70 ovetti, la probabilità arriva all'80%. Per avere una probabilità del 90%, dobbiamo mangiare quasi 90 ovetti.

Nella realtà questi numeri sono molto più bassi perché le persone tendono a scambiarsi le sorprese doppie, riducendo di gran lunga il numero di ovetti da mangiare. Ma questa è un'altra storia...